Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Soluções para EDO Rígidas

Métodos Numéricos II

Ricardo Bustamante de Queiroz

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

20 de junho de 2017

Apresentação

- Ricardo Bustamante de Queiroz
- Doutorado CRAb - UFC
- ricardobqueiroz+mn2@gmail.com
- http://www.busta.com.br/mn2/

- Página do Face (informativos, noticias etc)
  - https://www.facebook.com/groups/computacaoufc/
- Chat do Telegram (conversas casuais)
  - https://t.me/joinchat/AAAAAEOSM3hT241gbi92RA

Agenda

Agenda

- Solução de exercício da aula anterior
- Equações Diferenciais Ordinárias Rígidas
    - Introdução
    - Métodos Implícitos
    - Método Exponencial
    - Método de Ajuste Exponencial

Recapitulando

Exercício de Revisão

Exemplo 6.20

Resolva o problema

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + t^2\,\dfrac{dx}{dt} + 3\,x = t \\ x\,(0) = 1 \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = 2 \end{cases}$$

Use $h = 0.1\ s$

1. *Forward Euler:* $u_{n+1} = u_n + h\,f\,(u_n,\,t_n)$
2. *Backward Euler:* $u_{n+1} = u_n + h\,f\,(u_{n+1},\,t_{n+1})$
3. *Método de Euler modificado:*

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\,[f\,(u_{n+1},\,t_{n+1}) + f\,(u_n,\,t_n)]$$

4. *Runge-Kutta de terceira ordem:*

$$\begin{cases} k_1 = h\,f\,(u_n,\,t_n) \\ k_2 = h\,f\,(u_n + \frac{1}{2}\,k_1, t_n + \frac{h}{2}) \\ k_3 = h\,f\,(u_n - k_1 - 2\,k_2,\,t_n + h) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}\,(k_1 + 4\,k_2 + k_3) \end{cases}$$

5. *Preditor-corretor de Adams de terceira ordem*

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n+1} &= u_n + \frac{h}{12}\,(23\,u'_n - 16\,u'_{n-1} + 5\,u'_{n-2}) \\ \bar{u}'_{n+1} &= f\,(\bar{u}_{n+1},\,t_{n+1}) \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{12}\,(5\,\bar{u}'_{n+1} + 8\,u'_n - u'_{n-1}) \end{aligned}$$

Solução Exercício

Escrevendo de outra maneira:

$$\begin{cases} x''(t) = t - t^2 x'(t) - 3x(t) \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

Fazendo $x' = y$ temos:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) = f_x(t, x) \\ y'(t) = t - t^2 y(t) - 3x(t) = f_y(t, x, y) \\ y(0) = x'(0) = 2 \end{cases}$$

Solução Exercício

t_0	x_0	y_0
0	1	2

Usando *forward euler* como preditor para $\bar{y}_1$:

$$\bar{y}_1 = y_0 + hf_y(t_0, x_0, y_0)$$

$$\bar{y}_1 = 2 + 0{,}1\left(0 - 0^2 y(0) - 3x(0)\right);$$

$$\bar{y}_1 = 2 + 0{,}1(-3) = 1{,}7;$$

Calculando $\bar{x}_1$:

$$\bar{x}_1 = x_0 + hf_x(t_0, x_0) = x_0 + hy(t_0);$$

$$\bar{x}_1 = 1 + 0{,}1(2) = 1{,}2;$$

Solução Exercício

t_0	x_0	y_0	t_1	$\bar{x}_1$	$\bar{y}_1$
0	1	2	0,1	1,2	1,7

Usando *Backward Euler* como corretor para y_1 temos:

$$y_1 = y_0 + hf(t_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1)$$

$$y_1 = y_0 + h\left(t_1 - t_1^2\bar{y}_1 - 3\bar{x}_1\right)$$

$$y_1 = 2 + 0{,}1\left(0{,}1 - (0{,}1)^2 1{,}7 - 3(1{,}2)\right) = 1{,}8463$$

E o x_1...

$$x_1 = x_0 + h\bar{y}_1$$

$$x_1 = 1 + 0{,}1(1{,}7) = 1{,}17$$

"Erro" (comparado com o valor calculado pelo Wolfram, que provavelmente usa um método também)

$$e_1 = |x_1 - x(t_1)| = |1{,}17 - 1{,}18419| = 0{,}01419$$

Solução Exercício

t_0	x_0	y_0	t_1	x_1	y_1	t_2
0	1	2	0,1	1,17	1,8463	0,2

Vamos usar o *Euler modificado* para encontrar x_2

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(t_2, \bar{x}_2, \bar{y}_2) + f(t_1, x_1, y_1)\right]$$

Usando *forward euler* para encontrar $\bar{x}_2$ e $\bar{y}_2$:

$$\bar{y}_2 = y_1 + hf(t_1, x_1, y_1) = y_1 + h\left(t_1 - t_1^2 y_1 - 3x_1\right)$$

$$\bar{y}_2 = 1{,}8463 + 0{,}1\left(0{,}1 - (0{,}1)^2 1{,}8463 - 3(1{,}17)\right) = 1{,}5034537$$

$$\bar{x}_2 = x_1 + h\ f(t_1, x_1) = x_1 + h\ y_1$$

$$\bar{x}_2 = 1{,}17 + 0{,}1(1{,}8419) = 1{,}3541$$

Solução Exercício

t_0	x_0	y_0	t_1	x_1	y_1	t_2	$\bar{x}_2$	$\bar{y}_2$
0	1	2	0,1	1,17	1,8463	0,2	1,3541	1,5034537

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(t_2, \bar{x}_2, \bar{y}_2) + f(t_1, x_1, y_1)\right]$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left[(t_2 - t_2^2\bar{y}_2 - 3\bar{x}_2) + (t_1 - t_1^2 y_1 - 3x_1)\right]$$

$$y_2 = 1{,}8463 + 0{,}05 \quad [(0{,}2 - (0{,}2)^2 1{,}5034537 - 3(1{,}3541))$$

$$+(0{,}1 - (0{,}1)^2 1{,}8463 - 3(1{,}17))]$$

$$y_2 = 1.4787549426$$

Solução Exercício

t_0	x_0	y_0	t_1	x_1	y_1	t_2	$\bar{x}_2$	y_2
0	1	2	0,1	1,17	1,8463	0,2	1,4787549426	1,5034537

Usando o mesmo método para calcular x_2 temos:

$$x_2 = x_1 + \frac{h}{2}\left[f(t_2, \bar{x}_2) + f(t_1, x_1)\right]$$

$$x_2 = x_1 + \frac{h}{2}\left[y_2 + y_1\right]$$

PS: Estou usando y_2 em vez do $\bar{y}_2$. Teoricamente y_2 é uma aproximação melhor que $\bar{y}_2$, então não tem por que não usá-lo já que eu já calculei. **(Confirmem com o Prof. se é isso mesmo)**

$$x_2 = 1{,}17 + 0{,}05\left[1{,}5034537 + 1{,}8463\right] = 1{,}337487685$$

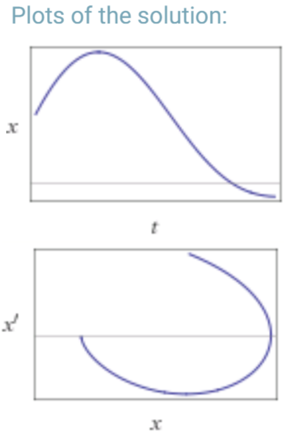
$$e_2 = |x_2 - x(t_2)| = |1{,}337487685 - 1{,}33376| = 0{,}003727685$$

ETC...

Resultado Exercício de Revisão

Calculado no Wolfram Alpha (link)

$$
\begin{aligned}
x(0{,}0) &= 1\\
x(0{,}1) &= 1{,}18419\\
x(0{,}2) &= 1{,}33376\\
x(0{,}3) &= 1{,}44489\\
x(0{,}4) &= 1{,}51499\\
x(0{,}5) &= 1{,}54300\\
x(1{,}0) &= 1{,}14742
\end{aligned}
$$



Equações Diferenciais Ordinárias Rígidas (Introdução)

EDO Rígidas

Entre a apostila, a wikipedia e o livro de matlab, encontrei definições que variam um pouco.

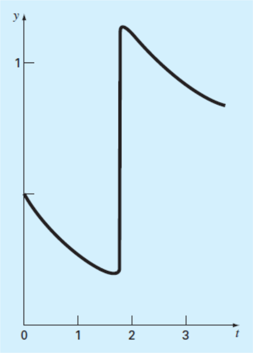
Apostila: Definição: Equações Diferenciais Ordinárias são ditas rígidas quando a solução é uma função suave, mas requer um Δt muito pequeno no método numérico para manter estabilidade.

Livro de Matlab: Uma EDO é dita *rígida* quando, apesar de suave, para um determinado Δt ela muda abruptamente de valor. Isso faz com que um Δt muito pequeno seja empregado para manter a estabilidade de métodos como *Euler* e *Runge-Kutta*.

Wikipedia: Uma equação diferencial é dita rígida *(stiff)* quando alguns métodos para solucionar as equações se tornam numericamente instáveis, a menos que o passo seja muito pequeno. É difícil definir com precisão o que é rigidez, mas a ideia principal é que a equação inclui termos que levam a uma rápida variação na solução.

Equações Diferenciais Ordinárias Rígidas

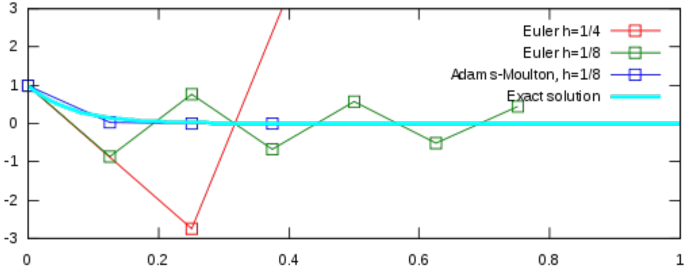
Aguardem melhorias nos slides em breve.



Equação rígida segundo o livro de matlab. A função é suave, mas muda de valor abruptamente.

Equações Diferenciais Ordinárias Rígidas

Aguardem melhorias nos slides em breve.



Equação rígida segundo a wikipédia. O método se torna muito instável para um Δt grande. (exercício da aula 2)

Equações Diferenciais Ordinárias Rígidas

Dado um problema da forma:

$$\begin{cases} y' = -\alpha y + s(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

O valor de $\frac{1}{|\alpha|}$ é denominado de "constante de tempo". A solução exata desse problema é:

$$\begin{cases} y(t) = y_0 e^{-\alpha t}, & \text{se } s(t) = 0\ \forall t \\ y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \int_0^t s(\xi) e^{\alpha \xi} d\xi, & \text{se } s(t) \neq 0\ \forall t \end{cases}$$

Obs: $\xi =$ "xi"

Equações Diferenciais Ordinárias Rígidas

Por exemplo, aplicando o método Runge-Kutta de 4ª ordem, a solução se torna estável quando $h < 2.785\frac{1}{|\alpha|}$ *(Valor tirado da apostila como exemplo. Ver estabilidade de algébrica dos métodos de runge-kutta na Wikipedia. Acho que tem um erro na direção do $<$)*. Assim, quando $\frac{1}{|\alpha|} \to 0$ o método tem de usar um valor $h \to 0$ para manter a estabilidade.
Por exemplo:

$$\alpha = -100000 \Rightarrow h < \frac{2.785}{100000} = 0.00002785$$

O valor de h precisa ser menor que 0.00002785 só para manter a estabilidade.

Equações Diferenciais Ordinárias Rígidas

Em um sistema de E.D.O., se uma das equações é rígida, Δt tem de ser pequeno para manter estabilidade.

$$\begin{cases} y' = -1y + 1z + 3 \\ z' = -10^7 z + 1y \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{10^7}$$

Métodos Implícitos

Métodos Implícitos

Dado o seguinte sistema de E.D.O.s com $y(0) = y_0$ e $z(0) = z_0$:

$$\begin{cases} y' = f(t, y, z) \\ z' = g(t, z, y) \end{cases}$$

Usando a fórmula de backward euler, temos:

$$\begin{cases} y_{n+1} - yn = h\ f(t_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \equiv h\ f_{n+1} \\ z_{n+1} - zn = h\ g(t_{n+1}, z_{n+1}, y_{n+1}) \equiv h\ g_{n+1} \end{cases}$$

Se f e g forem funções *não-lineares*, o sistema não pode ser resolvido de forma fechada (exata) e métodos iterativos, tais como o das substituições sucessivas, podem ser usados mas não são eficientes.

Métodos Implícitos

Uma opção mais eficiente é linearizar as equações por expansão de Taylor.

$$\begin{cases} f_{n+1} = f_n + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t \\ g_{n+1} = g_n + \frac{\partial g}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial g}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t \end{cases}$$

Pela equação anterior, temos:

$$\begin{cases} \Delta y = y_{n+1} - yn = h\ f_{n+1} \\ \Delta z = z_{n+1} - zn = h\ g_{n+1} \end{cases}$$

E como $h = \Delta t$ temos:

$$\begin{cases} \frac{\Delta y}{h} = f_n + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial t}h \\ \frac{\Delta z}{h} = g_n + \frac{\partial g}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial g}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial g}{\partial t}h \end{cases}$$

Métodos Implícitos

Reordenando os elementos, temos:

$$\begin{cases} \frac{\Delta y}{h} - \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y - \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z = f_n + \frac{\partial f}{\partial t}h \\ \frac{\Delta z}{h} - \frac{\partial g}{\partial z}\Delta z - \frac{\partial g}{\partial y}\Delta y = g_n + \frac{\partial g}{\partial t}h \end{cases}$$

Multiplica todo mundo por h e colocando Δy e Δz em evidência:

$$\begin{cases} \Delta y(1 - h\frac{\partial f}{\partial y}) - h\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z = f_n h + \frac{\partial f}{\partial t}h^2 \\ \Delta z(1 - h\frac{\partial g}{\partial z}) - h\frac{\partial g}{\partial y}\Delta y = g_n h + \frac{\partial g}{\partial t}h^2 \end{cases}$$

Essa equação pode ser descrita na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 - h\frac{\partial f}{\partial y} & -h\frac{\partial f}{\partial z} \\ -h\frac{\partial g}{\partial y} & 1 - h\frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n h + \frac{\partial f}{\partial t}h^2 \\ g_n h + \frac{\partial g}{\partial t}h^2 \end{bmatrix}$$

Métodos Implícitos

Ou então:

$$\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - h\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}\Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_n h + \frac{\partial f}{\partial t}h^2\\ g_n h + \frac{\partial g}{\partial t}h^2\end{bmatrix}$$

Ou:

$$(I - hJ)\bar{\Delta} = \begin{bmatrix}f_n h + \frac{\partial f}{\partial t}h^2\\ g_n h + \frac{\partial g}{\partial t}h^2\end{bmatrix}$$

Resolve-se por Eliminação de Gauss

Obs (apostila): Incondicionalmente Estável
Obs2: J é a **matriz jacobiana**
Obs3: Você quer encontrar o valor de $\bar{\Delta}$ para achar f_{n+1} e g_{n+1}

Método Exponencial

Método Exponencial

Suponha outra equação:

$$y'(t) = f(y, t)$$

Onde $f(y, t)$ não inclui t explicitamente. Adicionando cy aos dois lados da equação, onde c é uma constante, temos:

$$y' + cy = f(y, t) + cy$$

Multiplicando por e^{ct} temos:

$$y' e^{c\,t} + c\,y\,e^{c\,t} = [f(y, t) + c\,y]\,e^{c\,t}$$

Método Exponencial

Daí...

$$y' e^{c\,t} + c\,y\,e^{c\,t} = [f(y,t) + c\,y]\,e^{c\,t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(y' e^{c\,t}\right) = [f(y,t) + c\,y]\;e^{c\,t}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{d}{d\eta}\left(y' e^{c\,\eta}\right)\right]\,d\eta = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(y,\eta) + c\,y]\;e^{c\,\eta}\,d\eta$$

Resolvendo...

$$y(t_{n+1})e^{ct_{n+1}} - y(t_n)e^{ct_n} = \int_0^h [f(y,(t_n+\xi)) + c\,y]\;e^{c\,(t_n+\xi)}\,d\xi$$

Obs: $\eta =$ "eta". Mudança de variável $\eta = t_n + \xi$.

Método Exponencial

Multiplicando-se por $e^{-ct_{n+1}}$:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)e^{-c(t_{n+1}-t_n)} + \int_0^h [f(y,(t_n+\xi)) + c\,y]\; e^{c\,(\xi-(t_{n+1}-t_n))}\,d\xi$$

Trocando $(t_{n+1} - t_n)$ por h:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n)e^{-c\,h} + \int_0^h [f(y,(t_n+\xi)) + c\,y]\; e^{c\,(\xi-h)}\,d\xi$$

Dessa fórmula, vários métodos podem ser deduzidos, mudando a aproximação da integral de $f + cy$. A precisão da aproximação vai depender do valor de c.

Método Exponencial

Uma aproximação comumente utilizada é:

$$c = \frac{\partial f}{\partial y}(t_n) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_n$$

OBS: Quando $f(y, t)$ não tem dependência explícita de

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f'}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial t} ? \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y} f\right)$$

Assim

$$c = -\left(\frac{f'}{f}\right)_n$$

Método de Ajuste Exponencial

Método de Ajuste Exponencial

Aproximação:

$$[f(y,\, t_n + \xi) + c\, y\,(t_n + \xi)] \approx f_n + c\, y_n \tag{6.98}$$

Equação 6.94 reduz-se a

$$\underbrace{y_{n+1} = y_n + h\, f_n}_{Forward\ Euler} \left[\frac{1 - e^{-c\,h}}{c\,h}\right] \tag{6.99}$$

OBS: O método 6.99 é incondicionalmente estável

$$\begin{aligned} &\text{Se } h \to 0 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} \to y_n, \ \text{ pois } 1 - e^{-c\,h} \to 0 \\ &\text{Se } h \to \infty \quad \Rightarrow \quad \left[1 - \frac{1}{e^{c\,h}}\right] \to 1 \end{aligned}$$

Modificação do método 6.99 para melhorar a solução

Método de Ajuste Exponencial

1. Utilizar 6.99 como um preditor

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + f_n \left[\frac{1 - e^{-c\,h}}{c} \right] \tag{6.100}$$

ou no intervalo $t_n < t < t_{n+1}$

$$\xi = t - t_n$$

$$\bar{y}\,(t) = y_n + \left[\frac{1 - e^{-c\,\xi}}{c} \right] f_n \tag{6.101}$$

Método de Ajuste Exponencial

2. Reescrevemos 6.94 como corretor

$$y_{n+1} = \bar{y}_{n+1} + \int_0^h [f(\bar{y}(t_n + \xi), t_n + \xi) - f_n + c\,\bar{y}(t_n + \xi) - c\,y_n]\, e^{c(\xi?} \qquad (6.102)$$

A integral pode ser resolvida

(a) Analiticamente (se f for simples)
(b) Interpolação linear de [ ]
(c) Regra do Trapézio

Método de Ajuste Exponencial

interpolação linear

$$[f(\bar{y}(t_n + \xi)) - f_n + c\,\bar{y}(t_n + \xi) - c\,y_n] \approx B\,\xi \tag{6.103}$$

onde

$$B = \frac{f_{n+1} - f_n + c\,(y_{n+1} - y_n)}{h} \tag{6.104}$$

b)

$$y_{n+1} = \bar{y}_{n+1} + \frac{B\,h^2}{c\,h}\left(\frac{1 - e^{-c\,h}}{c\,h - 1}\right) \tag{6.105}$$

c)

$$y_{n+1} = \bar{y}_{n+1} + \frac{B\,h^2}{2} \tag{6.106}$$