Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Métodos Preditores-Corretores

Métodos Numéricos II

Ricardo Bustamante de Queiroz

Universidade Federal do Ceará

08 de junho de 2017

Apresentação

- Ricardo Bustamante de Queiroz
- Doutorado CRAb - UFC
- ricardobqueiroz+mn2@gmail.com
- http://www.busta.com.br/mn2/

- Página do Face (informativos, noticias etc)
  - https://www.facebook.com/groups/computacaoufc/
- Chat do Telegram (conversas casuais)
  - https://t.me/joinchat/AAAAAEOSM3hT241gbi92RA

Agenda

Agenda

- Observações Aula Anterior
- Observação Relevante sobre EDO de ordem superior
- Métodos Preditores-Corretores
    - Introdução
    - Método Preditor-Corretor de Adams de Terceira Ordem
    - Método Preditor-Corretor de Adams de Quarta Ordem
    - Vantagens e Desvantagens

Recapitulando

Recapitulando

Métodos de Runge-Kutta

$$y_{n+1} = y_n + \phi h$$

- Runge-Kutta de Primeira Ordem
  - Forward Euler $\boxed{\textit{Importante}}$

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\Delta t$$

Obs: Os métodos marcados com $\boxed{\textit{Importante}}$ estão na apostila.
Os demais foram tirados de outras fontes.

Recapitulando

Métodos de Runge-Kutta

- Runge-Kutta de Segunda Ordem
  - Euler Modificado (Método de Heun) $\boxed{\textit{Importante}}$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \left[\frac{f(t_n, y_n)}{2} + \frac{f(t_{n+1}, y_n + f(t_n, y_n)\Delta t)}{2} \right]$$

  - Ponto Intermediário

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n + h/2, y_n + f(t_n, y_n)h/2)h$$

  - Método de Raulston

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{3} f(t_n, y_n) + \frac{2}{3} f(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4} f(t_n, y_n)h) \right) h$$

Recapitulando

Métodos de Runge-Kutta

- Runge-Kutta de Terceira Ordem $\boxed{\textit{Importante}}$
  - Simpson 1/3

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}\left[f(t_n, y_n) + 4f(t_{n+\frac{1}{2}}, \bar{y}_{n+\frac{1}{2}}) + f(t_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\right] \\
\bar{y}_{n+\frac{1}{2}} &= y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \\
\bar{y}_{n+1} &= y_n + h\left[-f(t_n, y_n) + 2f(t_{n+\frac{1}{2}}, \bar{y}_{n+\frac{1}{2}})\right]
\end{aligned}
$$

Recapitulando

Métodos de Runge-Kutta

- Runge-Kutta de Quarta Ordem
  - RK4

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tfrac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1), \\ k_3 &= f(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned}$$

  - Simpson 3/8 $\boxed{\textit{Importante}}$

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{8}[f(t_n, y_n) + 3f(t_{n+\frac{1}{3}}, \bar{y}_{n+\frac{1}{3}}) + \\ + 3f(t_{n+\frac{2}{3}}, \bar{y}_{n+\frac{2}{3}}) + f(t_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{aligned}$$

EDO de Ordem Superior

Observação: Deveria ter sido mencionado melhor na introdução.

$$y^{(N)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(N-1)}(t)\right)$$

Introduzindo variáveis auxiliares

$$z_1(t) = y(t), z_2(t) = y'(t), \cdots, z_N(t) = y^{(N-1)}(t)$$

Temos a EDO de primeira ordem em $z(t)$

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ \vdots \\ z_{N-1}'(t) \\ z_N'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(N-1)}(t) \\ y^{(N)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \\ f(t, z_1(t), \ldots, z_N(t)) \end{pmatrix}$$

Para calcular o valor de $z'(t_0)$ são necessários N valores iniciais para t_0 $(z_1(t_0), \cdots, z_N(t_0))$.

Métodos Preditores-Corretores (Multistep)

Métodos Preditores-Corretores

Introdução

- Classificação de métodos quanto ao número de passos
  - **Métodos de passo simples**: dado t_n, calcula t_{n+1} em um único passo. *Ex: Euler.*
  - **Métodos de meio passo (Half-step)**: calcula valores intermediários *(e.g.* $t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{2}{3}}$*)* para determinar t_{n+1} e depois joga os valores fora. *Ex: Runge-Kutta.*
  - **Métodos de multiplos passos (Multistep)**: utilizam valores anteriores de t_i com $i \leq n$ para determinar t_{n+1}. *Ex: Métodos de Adams.*

Métodos Preditores-Corretores

Métodos preditores-corretores levam em conta que ao longo da computação dos valores, informação importante é determinada em passos anteriores, que podem ajudar na aproximação do próximo valor.

Preditor é a parte da equação que calcula um valor $\bar{y}$ em um tempo t_n. O valor de $\bar{y}$ é uma estimativa grosseira de um valor y.

Corretor é a parte da equação que usa um ou mais valores de $\bar{y}$ para t_i com $i \leq n$ para determinar o valor de y em t_n.

Métodos preditores-corretores

Métodos multi-passos lineares são métodos *multistep* que utilizam interpolações lineares dos pontos aproximados $\bar{y}$ para determinar o ponto y em t_n.

Uma fórmula geral para esses métodos seria da forma:

$$\begin{gathered} y_{n+s} + a_{s-1} \cdot y_{n+s-1} + a_{s-2} \cdot y_{n+s-2} + \cdots + a_0 \cdot y_n \\ = h \cdot [b_s \cdot f(t_{n+s}, y_{n+s}) + b_{s-1} \cdot f(t_{n+s-1}, y_{n+s-1}) \\ + \cdots + b_0 \cdot f(t_n, y_n)]. \end{gathered}$$

Onde a's e b's são coeficientes que determinam o método. Se $b_s = 0$, o método é dito *explícito*, caso contrário ele é chamado *implícito*.

Exemplos de métodos multistep lineares: Adams-Bashford e Adams-Moulton.

Métodos de Adams

Métodos de Adams

Os **Métodos de Adams**, também chamados de *Adams-Moulton*, pois foram desenvolvidos por *John Couch Adams*, mas *Forest Ray Moulton* percebeu que, combinado com os métodos de *Adams-Bashford*, formam um par *preditor-corretor*.

Considerando a função f como um polinômio p:

$$p(t_{n+i}) = f(t_{n+i}, y_{n+i}), \qquad \text{para } i = 0, \ldots, s-1.$$

Temos a fórmula de *Interpolação de Lagrange* que considera os últimos s elementos.

$$p(t) = \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(-1)^{s-j-1} f(t_{n+j}, y_{n+j})}{j!(s-j-1)!h^{s-1}} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{s-1} (t - t_{n+i}).$$

Métodos de Adams

Sabendo que podemos calcular um y_{n+s} sabendo o valor de s corresponde ao número de pontos anteriormente conhecidos, temos a aproximação, dada por:

$$y_{n+s} = y_{n+s-1} + \int_{t_{n+s-1}}^{t_{n+s}} p(t)\, dt.$$

Ou seja, a curvatura entre t_{n+s-1} e t_{n+s} é determinada pela interpolação dos pontos anteriores.

Métodos de Adams

Substituindo p pelo polinômio interpolado com $0 \leq j < s$, obtemos a seguinte fórmula:

$$b_{s-j-1} = \frac{(-1)^j}{j!(s-j-1)!} \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{s-1} (u+i)\, du, \qquad \text{para } j = 0, \ldots, s-1.$$

Onde b são os coeficientes da fórmula geral do método de **Adams-Bashford**. O método é dito de ordem s dependendo do valor utilizado para o cálculo da fórmula.
Os valores de a_i são $a_{s-1} = -1$ e $a_{s-2}, \ldots, a_0 = 0$.

Métodos de Adams

Método de Adams-Bashford

$$y_{n+1} = y_n \quad + hf(t_n, y_n), \qquad \text{(É o próprio Método de Euler)}$$

$$y_{n+2} = y_{n+1} \quad + h\left(\tfrac{3}{2}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \tfrac{1}{2}f(t_n, y_n)\right),$$

$$y_{n+3} = y_{n+2} \quad + h\left(\tfrac{23}{12}f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \tfrac{4}{3}f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \tfrac{5}{12}f(t_n, y_n)\right),$$

$$y_{n+4} = y_{n+3} \quad + h\left(\tfrac{55}{24}f(t_{n+3}, y_{n+3}) - \tfrac{59}{24}f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \tfrac{37}{24}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \tfrac{3}{8}f(t_n, y_n)\right),$$

$$y_{n+5} = y_{n+4} \quad + h\left(\tfrac{1901}{720}f(t_{n+4}, y_{n+4}) - \tfrac{1387}{360}f(t_{n+3}, y_{n+3}) + \tfrac{109}{30}f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \tfrac{637}{360}f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \tfrac{251}{720}f(t_n, y_n)\right).$$

Métodos de Adams

Método de Adams-Moulton

Semelhante ao Adams-Bashford, mas considera o elemento no tempo t_n, além dos elementos em $t_{-1}, \ldots, t_{n-s}$:

$$b_{s-j} = \frac{(-1)^j}{j!(s-j)!} \int_0^1 \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{s} (u+i-1)\, du, \qquad \text{for } j = 0, \ldots, s.$$

Os valores de a_i também são $a_{s-1} = -1$ e $a_{s-2}, \ldots, a_0 = 0$.

O b só muda pois $b_s = 0$ não é mais uma restrição.

Métodos de Adams

Método de Adams-Moulton

$$y_n = y_{n-1} + hf(t_n, y_n), \text{(Método Backward-Euler)}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\left(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)\right), \text{(Regra do trapézio)}$$

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h\left(\frac{5}{12}f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{2}{3}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{12}f(t_n, y_n)\right),$$

$$\begin{aligned} y_{n+3} = y_{n+2} &+ h\left(\frac{3}{8}f(t_{n+3}, y_{n+3}) + \frac{19}{24}f(t_{n+2}, y_{n+2})\right. \\ &\left.- \frac{5}{24}f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{1}{24}f(t_n, y_n)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n+4} = y_{n+3} &+ h\left(\frac{251}{720}f(t_{n+4}, y_{n+4}) + \frac{646}{720}f(t_{n+3}, y_{n+3})\right. \\ &\left.- \frac{264}{720}f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{106}{720}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{19}{720}f(t_n, y_n)\right). \end{aligned}$$

Métodos de Adams

Exemplo de passo a passo na aplicação do método, usando método preditor-corretor de 3^a ordem:

1. Obtém $y(t_0)$ pelo valor inicial
2. Utiliza-se forward euler para encontrar $\bar{y}(t_1)$,
3. Utiliza-se backward euler para encontrar $y(t_1)$,
4. Utiliza-se Adams-Bashford de 2a ordem $\Rightarrow \bar{y}(t_2)$,
5. Utiliza-se Adams-Moulton de 2a ordem $\Rightarrow y(t_2)$,
6. Utiliza-se Adams-Bashford de 3a ordem $\Rightarrow \bar{y}(t_3)$,
7. Utiliza-se Adams-Moulton de 3a ordem $\Rightarrow y(t_3)$,
8. Utiliza-se Adams-Bashford de 3a ordem $\Rightarrow \bar{y}(t_4)$,
9. Utiliza-se Adams-Moulton de 3a ordem $\Rightarrow y(t_4)$,
10. etc

Fim!