Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação
CRAb - Computação Gráfica, Realidade Virtual e Animação

Solução de Problemas de Valores Iniciais de Equações Diferenciais Ordinárias

Métodos Numéricos II

Ricardo Bustamante de Queiroz

Universidade Federal do Ceará

30 de maio de 2017

Apresentação

Apresentação

- Ricardo Bustamante de Queiroz
- Doutorado CRAb - UFC
- ricardobqueiroz+mn2@gmail.com
- http://www.busta.com.br/mn2/

Agenda

Agenda

- Introdução
- Problema de Queda Livre
- Problema de Queda Livre com Resistência do ar
- Métodos Numéricos para Problemas de Valor-Inicial

Problema de Queda Livre

Problema de Queda Livre

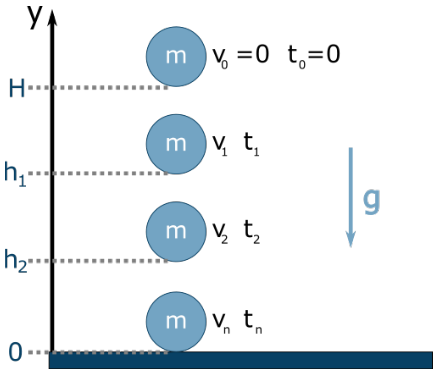

Figura: Ilustrando uma esfera de massa m sendo liberada de uma altura H sob um campo gravitacional exercendo uma aceleração g para baixo.

Problema de Queda Livre

- Segunda Lei de Newton
  - Princípio fundamental da dinâmica

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

  - Taxa temporal da variação do momento linear.

$$\vec{F} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

Problema de Queda Livre

- Voltando ao problema

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\vec{g}$$

$$-\vec{g} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}$$

- daí

$$-\vec{g} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{y}}{\mathrm{d}t^2}$$

Problema de Queda Livre

- Integrando, temos:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\vec{g} \Rightarrow \vec{v} = -\int \vec{g}dt = -\vec{g}t + \vec{c}_1$$

- Novamente:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \Rightarrow \vec{y}(t) = -\frac{\vec{g}t^2}{2} + \vec{c}_1 t + \vec{c}_2$$

Problema de Queda Livre

- Para determinar $\vec{c}_1$ e $\vec{c}_2$ precisamos de duas condições iniciais:

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

- Apenas substituindo nas equações anteriores:

$$\vec{v}(0) = -\cancel{\vec{g}0} + \vec{c}_1 \Rightarrow \vec{v}_0 = \vec{c}_1$$

$$\vec{y}(0) = -\cancel{\frac{\vec{g}0^2}{2}} + \cancel{\vec{c}_1 0} + \vec{c}_2 \Rightarrow \vec{y}_0 = \vec{c}_2$$

Problema de Queda Livre

- Finalmente temos nossas equações:

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 t - \vec{g}t$$

- Suponha que o corpo é solto de uma altura H partindo do repouso.
- Condições iniciais para o caso unidimensional são:

$$y_0 = H$$
$$v_0 = 0$$

Problema de Queda Livre

- Assim, podemos calcular a solução do problema para qualquer valor t usando as seguintes equações:

$$y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v(t) = -gt$$

Problema de Queda Livre com Resistência do Ar

Problema de Queda Livre com Resistência do Ar

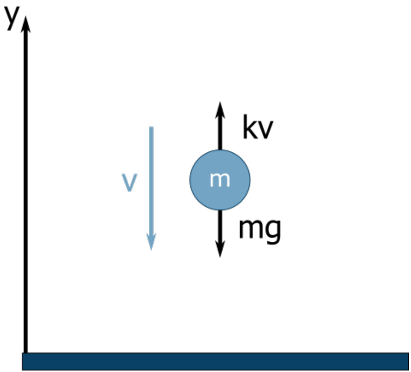

Figura: Uma esfera de massa m em queda livre, com velocidade v. Nesse momento, a resistência do ar corresponde a kv, onde k é uma constante de proporcionalidade, que depende de propriedades dos materiais envolvidos.

Problema de Queda Livre com Resistência do Ar

- Da mesma forma que anteriormente...

$$\vec{F} = k\vec{v} - m\vec{g} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{y}}{\mathrm{d}t^2}$$

- Dividindo todo mundo por m e substituindo $\vec{v}$ por $\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t}$ temos:

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{y}}{\mathrm{d}t^2} - \frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} + \vec{g} = 0$$

- ou

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{k}{m}\vec{v} + \vec{g} = 0$$

Problema de Queda Livre com Resistência do Ar

- Dai, temos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f(v,t) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

- A variação da velocidade ao longo do tempo depende da velocidade em um dado tempo.
- Em alguns casos f(v,t) pode ser uma função não-linear de v.
- E agora? Fazendo $\frac{k}{m} = a$ e $-g = b$ para simplificar:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{k}{m}\vec{v} + \vec{g} = 0 \Rightarrow v' - av = b$$

Problema de Queda Livre com Resistência do Ar

- Solução Analítica

$$\begin{cases} v' - av = b \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

- EDO "A habilidade em encontrar soluções exatas em geral depende da habilidade em reconhecer certos tipos de equações diferenciais e da aplicação de um método específico. Em outras palavras, o que funciona para um tipo de equações diferenciais não necessariamente se aplica a outro tipo." Wikipedia
- Pesquisem se quiserem saber mais a fundo. É bem interessante.

Resolvendo EDO Analiticamente

- Mágica: Multiplicando por e^{-at} temos:

$$e^{-at}(v' - av) = e^{-at}b$$

- mas

$$e^{-at}(v' - av) = (v'e^{-at} - ave^{-at}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}ve^{-at}$$

- Então...

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}ve^{-at} = e^{-at}b$$

Resolvendo EDO Analiticamente

- Integrando, temos:

$$ve^{-at} = -\frac{b}{a}e^{-at} + c_1$$

- Aplicando as condições iniciais* (tem um erro na apostila):

$$v_0 e^0 = -\frac{b}{a}e^0 + c_1 \Rightarrow c_1 = v_0 + \frac{b}{a}$$

- Substituindo o valor de c_1 temos:

$$ve^{-at} = -\frac{b}{a}e^{-at} + v_0 + \frac{b}{a}$$

Resolvendo EDO Analiticamente

- Multiplicando por e^{at} temos:

$$v\cancel{e^{-at+at}} = -\frac{b}{a}\cancel{e^{-at+at}} + v_0 e^{at} + \frac{b}{a}e^{at}$$

- Organizando e colocando $\frac{b}{a}$ em evidência:

$$v(t) = v_0 e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)$$

- Yay!
- OBS: Exemplos de EDO (errinho na apostila):

$$1^a ordem : v' - a_0 v = f(t)$$
$$2^a ordem : v'' + a_1 v' + a_0 v = f(t)$$

Métodos Numéricos para Problemas de Valor-Inicial

- A solução exata do problema:

$$\begin{cases} u' = f(u,t) \text{ Equação Diferencial Ordinária} \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

- É contínua no tempo. Nos métodos numéricos tentamos acompanhar a solução de forma discreta do tempo. Assim, começando de $u(0) = u_0$, damos um passo finito Δt de cada vez e esperamos que depois de n passos a solução numérica $u_n \approx u(n\Delta t)$.

Métodos Numéricos para Problemas de Valor-Inicial

- Devemos nos preocupar com:
  1. **Precisão**: o erro $u(n\Delta t) - u_n$ tem a seguinte forma: $E = C(\Delta t)^p$. Para reduzir o erro podemos aumentar a ordem de precisão, p , ou diminuir Δt. *(C é uma constante.)*
  2. **Simplicidade**: o passo de u_n para u_{n+1} pode ser rápido ou vagaroso, dependendo da quantidade de vezes que calculamos $f(t, u)$.
  3. **Estabilidade**: em cada passo, pequenos erros são introduzidos. Se o erro acumulado crescer de forma descontrolada o resultado é inútil.

Métodos Numéricos para Problemas de Valor-Inicial

- Procedimento numérico (Método da variável discreta): construir valores aproximados

$$u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$$

- da solução exata nos tempos

$$t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots$$

- dada por

$$u(t_0), u(t_1), u(t_2), \cdots, u(t_n), \cdots$$

Métodos Numéricos para Problemas de Valor-Inicial

- Como determinar u_1 a partir de u_0 e $f(u_0, t_0)$?
- Métodos
  - One-step (passo-simples)
  - Stepwise (passo-a-passo)
  - Starting methods (de inicialização)
- Precisam do conhecimento de u_n para determinar u_{n+1}
- Métodos
  - Multistep (passo-múltiplo)
  - Continuing Methods (de continuação)
- Precisam do conhecimento de u_n, u_{n-1}, $\cdots$ para determinar o valor de u_{n+1}
- OBS: Todo método de passo-múltiplo precisa de um método de inicialização (passo-simples) para obter os valores iniciais do método.

- Qual a sensibilidade da solução com relação às condições iniciais ou a outros parâmetros do problema?
- Convergência: $\Delta t \to 0 \Rightarrow y_i \to u(t_i)$?
- Erros:
  - Fórmula (ou truncamento, ou discretização)
  - Erro de arredondamento

Fim!